線形代数及び演習 II　演習プリント No.1　(2019.9.23)

1. 次の行列の転置行列を答えなさい．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列が対称行列になるように a, b, c を定めなさい.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & b \\ c & a+c & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 2-b & b+c \\ a & 5 & c \\ 2a+b & a-2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が交代行列のとき, その対角成分は全て零になることを示しなさい.

4. 次の行列の積を計算しなさい.

$$(1)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. 次の行列のうち積が定義されるすべての組み合わせを求め，その積を計算しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

6. 次の行列 A に対して A^n を計算しなさい．

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad (3)\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. A, B を n 次の正方行列とする．次の等式の中で常に成り立つものはどれか答えなさい．

$$(a)\quad (A+I)^2 = A^2+2A+I \qquad (b)\quad (A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$
$$(c)\quad (A+B)(A-B) = A^2-B^2 \qquad (d)\quad (A+2I)(A-2I) = A^2-4I$$
$$(e)\quad (A-B)^2 = A^2-2AB+B^2 \qquad (f)\quad (A^2+A+I)(A-I) = A^3-I$$

8. 次の連立方程式を行列とベクトルで書きなさい．

$$(1)\quad \begin{cases} 2x+3y=6 \\ -3x+5y=2 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=1 \\ -3x_1+2x_2-x_3=-2 \\ x_1-x_3=5 \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} x_1-2x_3+5x_4=-5 \\ x_2-x_3=9 \\ x_1-x_2+3x_4=2 \end{cases}$$

9. 行列の（行）基本変形とよばれる 3 つの変形を述べなさい．

10. 次の行列を行基本変形を用いて簡約な行列に変形しなさい．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

11. 次の行列を簡約化し主成分に丸印を付けなさい．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. 任意の n 次の正方行列 A は対称行列と交代行列の和に表せることを示しなさい．(一般の n 次の正方行列に X, Y に対して，$(X+Y)^T = X^T+Y^T$ が成り立つことを使ってよい.)