線形代数及び演習 II　演習プリント No.2　(2019.9.30)

1. 次の行列 A を簡約な行列に変形し，行列 A の階数 (rank A）を答えなさい．

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}\quad (2)\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&-1&2&2\\-2&3&-1&2\\0&3&-1&4\end{pmatrix}\quad (3)\quad A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\2n-1&2n\end{pmatrix}\quad (n:2\text{ 以上の整数})$$

2. 次の同次連立方程式の解を求めなさい．

$$(1)\begin{cases}2x+3y+z=0\\-x+y+2z=0\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}x-y-4z+u=0\\3x+z-2u=0\\x+2y+z-3u=0\end{cases}$$

3. n 変数連立 1 次方程式の係数行列を A ($m\times n$ 行列), 拡大係数行列を $A'=(A,\boldsymbol{b})$ とする．次の定理がなりたつ．

   (i) rank $(A')=$ rank $(A)+1$ なら解は存在しない．

   (ii) rank $(A')=$ rank $(A)<n$ なら解は無数にある．

   (iii) rank $(A')=$ rank $(A)=n$ なら解は唯一つ存在する．

   以下の 3 つの方程式

$$x+2y-3z=-3,\quad -x-y+2z=3,\quad 3x-4y+z=-6,$$

   のうち最初から m 個 ($m=1,2,3$) を連立させた 3 組の連立 1 次方程式について上の定理のどの場合か確かめ，解がある場合は解を求めなさい．

4. 次の連立方程式を行列の簡約化を使って解きなさい．

$$(1)\quad\begin{cases}x_1+2x_3-x_4+2x_5=3\\2x_1+x_2+3x_3-x_4-x_5=-1\\-x_1+3x_2-5x_3+4x_4+x_5=-6\end{cases}\qquad (2)\quad\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=1\\-x_1+2x_2-x_4-2x_5=0\\3x_1-6x_2+x_3+4x_4+7x_5=1\end{cases}$$

5. 次の連立方程式が解をもつための a, b の条件を求めなさい.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = a \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = b \end{cases}$$

6. 次の行列の逆行列を行列の簡約化を使って求めなさい.

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. 次が成り立つことを示しなさい.

(1) A が正則なら A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) A が正則なら A^T も正則で $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(3) A, B が正則なら, AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8. $AB = O$ となる $B(\neq O)$ が存在するなら A は正則でないことを示しなさい. ただし, O は零行列をである.