線形代数及び演習 II　演習プリント No.3　(2019.10.07)

1. n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対する行列式の定義

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

を説明しなさい.

2. 次の行列式の指定された行または列に関する余因子展開を書きなさい.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (第 1 行と第 2 行)　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (第 2 列と第 3 列)

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ (第 3 行と第 2 列)

3. 次の行列式の値を求めなさい.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

4. 次の行列式の値を求めるのに，行列式の性質を使ってある列または行の成分を 1 つを除いて零にし，それから余因子展開を使いなさい.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5. 次の行列の余因子行列と逆行列を求めなさい.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. 次の行列式を求めなさい．

$$(1)\ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ -2 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

7. 次が成り立つことを示しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3+x_4 & x_4+x_1 & x_1+x_2 & x_2+x_3 \end{vmatrix} = 0$$

8. n 次正方行列 A, B について等式 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つことを使って以下を証明しなさい．以下では X, Y は n 次正方行列とする．

(1) X が正則行列のとき $\det(X^{-1}) = \dfrac{1}{\det(X)}$ が成り立つ．

(3) ある正の整数 k に対して $X^k = I$ ならば $\det(X) = 1$ または $\det(X) = -1$ である．ただし，X は実の行列とする．

9. (1) 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)^T, \boldsymbol{b} = (x_2, y_2)^T$ に対し，この 2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式

$$\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

の絶対値は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を辺にもつ平行四辺形の面積を表すことを示しなさい．

(2) 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)^T, \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)^T, \boldsymbol{c} = (x_3, y_3, z_3)^T$ に対し，この 3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式

$$\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

の絶対値は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺にもつ平行六面体の体積を表す．これを

$$\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

という等式を使って，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が xy 平面上にある場合に示しなさい．ただし，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

である．