線形代数及び演習 II　**演習プリント No.5**　(2019.10.28)

1. A を n 次の正方行列とする．$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ 全体の集合は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となることを示しなさい．

2. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が基 (底) となる条件を述べなさい．

3. ベクトル空間 V の次元（有限の場合）の定義を述べなさい．

4. V をベクトル空間とする．W_1, W_2 が V の部分空間なら $W_1 \cap W_2$ も V の部分空間であることを示しなさい．

5. 次の W はベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間かどうか調べなさい（問 1 の結果を使ってよい）．

   (1) $W_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$

   (2) $W_2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 1,\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1\}$

   (3) $W_3 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$

6. 次のベクトルは 1 次独立か 1 次従属か調べなさい．ただし，(3) の f_1, f_2, f_3 は実数を係数とする高々2 次の多項式全体が成すベクトル空間のベクトルとする．

   (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

   (3) $f_1(x) = 1 - 2x + x^2,\quad f_2(x) = 3 - 3x + x^2,\quad f_3(x) = 3x + 2x^2$

7. 次の各組みのベクトルに対して次の問いに答えなさい.

(i) 1 次独立な最大個数 r を求めなさい.

(ii) r 個の 1 次独立なベクトルを前の方から順に求めなさい.

(iii) 他のベクトルを (ii) のベクトルの 1 次結合で書き表しなさい.

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $f_1 = 1 + 2x, \quad f_2 = 2 + 3x - x^3, \quad f_3 = 1 - x + 2x^2, \quad f_4 = 1 + x - x^3, \quad f_5 = 3x - 2x^2$

8. 次のベクトル空間 W の次元と基 (底) を求めなさい.

$$W = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$$

9. 次の命題の正否を答えなさい. 正しい場合は証明しなさい. 間違っている場合は判例をあげなさい.

「$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立ならば $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立.」