線形代数及び演習 II　演習プリント No.6　(2019.11.11)

1. 3 次正方行列 A の左から Q を乗じると，行列 A の第 2 行と第 3 行が交換されるような正則行列 Q を答えなさい．

2. 3 次正方行列 A の左から Q を乗じると，行列 A の第 3 行が $c(\neq 0)$ 倍される正則行列 Q を答えなさい．

3. 3 次正方行列 A の左から Q を乗じると，行列 A の第 3 行に第 2 行を c 倍したものが加えられるように正則行列 Q を決めなさい．

4. ベクトル空間 V について $\dim(V) = n$ とする．V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ について次の 3 条件は同値であることを証明しなさい．
   (1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基である．
   (2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．
   (3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する．

5. $V = \boldsymbol{R}[x]_2$ (実数を係数とする高々2 次以下の多項式全体）の次のベクトルは V の基であることを示しなさい．
$$f_1(x) = 2 - x + x^2, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = 3 - 6x + 2x^2$$

6. 次のベクトル空間の次元と基 (底) を求めなさい．
$$(1)\ \ W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$
$$(2)\ \ W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$
$$(3)\ \ W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

7. 次のベクトルに対して以下の問いに答えなさい．

1) 1 次独立なベクトルの最大個数 r を答えなさい．

2) $\boldsymbol{a}_1$ を他の 1 次独立なベクトルの 1 次結合で表しなさい．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ がベクトル空間の基で $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)A$ のとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基になる必要十分条件は A が正則であることを示しなさい．

9. 次のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ を行列を用いて $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ の 1 次結合で表しなさい．また，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立なとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次独立か 1 次従属か調べなさい．(前問の結果を使ってよい．)

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \qquad \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4,$$

$$\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + 2\boldsymbol{u}_4, \qquad \boldsymbol{v}_4 = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 + 2\boldsymbol{u}_4$$