線形代数及び演習 II　演習プリント **No.7**　(2019.11.18)

1. U, V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．U から V への写像 T が線形 (1 次) 写像である定義を述べなさい．

2. 任意の $m \times n$ 行列 A に対してベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ で定義する．T_A は線形写像になっていることを確かめなさい．

3. $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 T は適当な $m \times n$ 行列 A によって $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書けることを示しなさい．

4. $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ で定義される線形写像を考える．像 $\mathrm{Im}(T_A)$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間で，一方，核 $\mathrm{Ker}(T_A)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示しなさい．

5. 次の行列 A に対して線形写像 $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考えたとき，その像の次元と核の次元を求めなさい．

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -5 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 6 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. 問題 5 のそれぞれの線形写像についてその像の基 (底) と核の基 (底) をそれぞれ求めなさい．

7. 2 次元のベクトル空間 U, V とそれぞれの基を $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ とする．T を U から V への線形写像とし，$T(\boldsymbol{u}_1) = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$, $T(\boldsymbol{u}_2) = c\boldsymbol{v}_1 + d\boldsymbol{v}_2$ とする．T の表現行列を求めなさい．

8. 次の線形変換 T の与えられた基に対する表現行列を求めなさい．

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} :\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \qquad \mathbb{R}^3 \text{の基}\ \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．