

線形代数及び演習 II 演習プリント No.9 (2019.12.9)

1. ベクトル空間  $V$  の線形変換  $T$  についてその固有値と固有ベクトルとはどういうものか説明しなさい.

2. 次の行列  $A$  の固有値を求めなさい.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列  $A$  と多項式  $f(t)$  に対して  $f(A)$  を計算しなさい.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, f(t) = 2t^2 - t - 15 \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, f(t) = t^2 + 2t - 8$$

4. 実固有値に対する固有空間は部分空間になっていることを確かめなさい.

5. 次の行列の固有値と,  $T = T_U$  ( $T_U(\mathbf{x}) = U\mathbf{x}$ ,  $U = A, B, D$ ) とおいた線形変換の各固有値についての固有空間を求めなさい.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$  とする. 次の  $f(t)$  に対して, ケイリー・ハミルトンの定理を用いて  $f(A)$  を計算しなさい.

$$(1) f(t) = t^{15} \quad (2) f(t) = t^{12} + t^7 - 1$$

7. 正方行列  $A$  が対角化できるとはどういうことか説明しなさい.

8. 問題 5. の行列で対角化できる場合は対角化しなさい.