線形代数及び演習 II　演習プリント No.10　(2019.12.16)

1. $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$ について標準内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ の定義を書きなさい．

2. ベクトル空間に内積 $(\cdot, \cdot)$ が定義されている内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し $\boldsymbol{u}$ のノルム（長さ）$\|\boldsymbol{u}\|$ の定義を書きなさい．

3. 次を示しなさい．

   (1) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2)$

   (2) $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ について，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が直交する $\Leftrightarrow \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$

   (3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ について，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ が直交する $\Leftrightarrow \|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$

4　内積空間 V のノルムについて，次が成り立つことを示しなさい．ただし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$.

   (1) $\|c\boldsymbol{u}\| = |c|\|\boldsymbol{u}\|$.

   (2) $|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$.

   (3) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$.

5. n 次の実正方行列 P が直交行列であることの定義を述べなさい．

6. n 次の実正方行列を $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ と列ベクトル表示する．次のことがいえることを示しなさい．

   「A が直交行列である」 $\Leftrightarrow$ 「$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基, すなわち，$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ が成り立つ」

7. 次の行列は直交行列であることを示しなさい．

   (1) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & \sqrt{5}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{5}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} \cos\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

8. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルを並べた順にシュミットの方法で正規直交化しなさい．

   (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. A を n 次直交行列とする．$\|A\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つことを示しなさい．(ヒント：$\|A\boldsymbol{u}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2$ を示せ.)

10. 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列を用いて対角化しなさい．