線形代数及び演習 II　演習プリント **No.11**　(2019.12.23)

1. 実対称行列 A の固有値は全て実数になることを示しなさい．

2. n 次の実対称行列 A について，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ A の固有値 λ_1, λ_2 に対する固有ベクトルとする．$\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ は直交することを示しなさい．

3. 次の実対称行列を直交行列を用いて対角化しなさい．

$$(1)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 次の 2 次形式 $q(x_1, x_2)$ は適当な対称行列 A を用いて $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ と書き直すことができる．この A を求めなさい．

$$q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

5. 次の 2 次形式を適当な対称行列 A によって $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ の形に書き直し，直交変数変換で対角化しなさい．そのときの直交変換も明記しなさい．

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

6. 次の 2 次形式を適当な対称行列 A によって $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ の形に書き直しなさい．

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_3x_1$$