1. (1) $A$を対角化する　$|A-\lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda)-12 = (\lambda+2)(\lambda-5)=0$

$\lambda=-2$ のとき　$A+2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ より 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda=5$ のとき　$A-5I = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ より 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ とおいて　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ と対角化する

$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ より

$A^n = P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4(-2)^n+3\cdot 5^n & -3\cdot(-2)^n+3\cdot 5^n \\ -4(-2)^n+4\cdot 5^n & 3\cdot(-2)^n+4\cdot 5^n \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5(-2)^n + 9\cdot 5^n \\ -5(-2)^n + 12\cdot 5^n \end{pmatrix}$　$\left(\begin{cases} x_n = \frac{5}{7}(-2)^n + \frac{9}{7}\cdot 5^n \\ y_n = -\frac{5}{7}(-2)^n + \frac{12}{7}\cdot 5^n \end{cases}\right)$

2.　$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2 = 0$

$\lambda=2$ …固有値　$A-2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ より 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$を含む直交基底として $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ をとり　$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおいて

$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.　(テキスト P123 例題6.3.1 参照)

$A$の固有値は　$|A-\lambda I| = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$ より $\lambda = 1, -1$ で全て実数.　$\lambda=1$ の固有空間は $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}c_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$を含む $\mathbb{R}^3$の 正規直交基 $\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ をとる　直交行列

$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いると　$Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$ とおくと　$|B-\lambda I| = \lambda^2-1 = 0$　$\lambda=1$ の固有空間 の正規直交基として

$\left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$ をとり $R = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ とおくと

$$P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とおくと $P$ は直交行列で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と上三角化できる.

4. $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = (x, y)\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6 = 0$ $A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$ とおく

$A$ を直交行列で対角化する $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 6)(\lambda - 2) = 0$

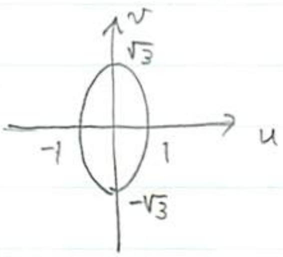
$\lambda = 2, 6$. $\lambda = 2$ に対する長さ1の固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 6$ に対する長さ1の固有ベクトル $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ をとり

$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ とおいて $x = Pu$ と変換すると $\left( u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)$

$$(x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (Pu)^T A P u = u^T (P^T A P) u = (u, v) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$= 6u^2 + 2v^2 = 6$ よって $u^2 + \frac{v^2}{3} = 1$




$P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ と表されるから