線形代数及び演習II 演習プリント No.1 解答 (9.23)

1. (1) $\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}5&8&11\\6&9&12\\7&10&13\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\\-5&8\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&0&-1&7\\0&0&2&0\\3&5&3&0\end{pmatrix}$

2. (1) 対称行列になる条件は $a=2,\ c=3,\ a+c=b$ より $a=2,\ b=5,\ c=3$

(2) 〃 $a=2-b,\ 2a+b=b+c,\ a-2=c$ より

$\begin{cases}2a=c\\a-2=c\end{cases}$ を解いて $a=-2,\ b=4,\ c=-4$

3. $A^T=-A$ より $a_{ji}=-a_{ij}$ が全ての $i,j=1,2\cdots n$ について成り立つ。$i=j$ のとき

$a_{ii}=-a_{ii}$ より $a_{ii}=0$ よって対角成分は全て零.

4. (1) $\begin{pmatrix}-2+3-15&-2-5&2+6-15\\-6+7+24&-6+8&6+14+24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14&-7&-7\\25&2&44\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}-2+3&3+(-3)\\5&-5\\2-12+3&-3+14-3\\-14&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\5&-5\\-7&8\\-14&21\end{pmatrix}$

5. $AB=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1+4\\1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$, $DA=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&-5\\4&1&7\end{pmatrix}$

$CB=(3\ -3\ 4)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=(8)$, $BC=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(-3\ -3\ 4)=\begin{pmatrix}3&-3&4\\3&-3&4\\6&-6&8\end{pmatrix}$

6. (1) $A^n=\begin{pmatrix}a^n&0\\0&b^n\end{pmatrix}$ (2) $A^2=\begin{pmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{pmatrix}\cdots A^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$

($A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{n+1}&a^n+na^n\\0&a^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{n+1}&(n+1)a^n\\0&a^{n+1}\end{pmatrix}$ 帰納法より成り立つ)

(3) $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

より $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $(n\geqq 3)$

7. (a), (d) (f)

8. (1) $\begin{pmatrix}2&3\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&2&5\\-3&2&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&0&-2&5\\0&1&-1&0\\1&-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\9\\2\end{pmatrix}$

9. 3つの変形 (i) 2つの行を入れ替える (ii) 1つの行に零でない定数を乗じる

(iii) 1つの行に他の行の何倍かを加える

(この順でなくともよい。また表現が違っても同じ内容ならよい。

10 (1)

$$\begin{pmatrix}0&2&0&1&2\\0&0&1&2&-1\\1&1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{①}\rightleftarrows\text{③}}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&0&1&2&-1\\0&2&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{②}\rightleftarrows\text{③}}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&2&0&1&2\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{②}\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&0&\frac{1}{2}&1\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{①}+\text{③}\times(-1)}\begin{pmatrix}1&1&0&-2&2\\0&1&0&\frac{1}{2}&1\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{①}+\text{②}\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{2}&1\\0&1&0&\frac{1}{2}&1\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}2&1&9&1\\1&0&1&1\\0&2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{①}\rightleftarrows\text{②}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&9&1\\0&2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{③}\times\frac{1}{2}]{\text{②}+\text{①}\times(-2)}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&7&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{③}+\text{②}\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&7&-1\\0&0&-6&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{③}\times(-\frac{1}{6})}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&7&-1\\0&0&1&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{①}+\text{③}\times(-1)]{\text{②}+\text{③}\times(-7)}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&\frac{4}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

11 (1)

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\2&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times(-1)]{\text{②}+\text{①}\times(-2)}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&-1&2&1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{③}\times\text{②}\times(-1)}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&-1&2&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③}\times(-1)]{\text{②}\times(-1)}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&-2&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{①}+\text{③}]{\text{②}+\text{③}\times 2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{①}+\text{②}\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}2&-1&2&1\\1&-2&2&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{①}\rightleftarrows\text{②}}\begin{pmatrix}1&-2&2&0\\2&-1&2&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times(-1)]{\text{②}+\text{①}\times(-2)}\begin{pmatrix}1&-2&2&0\\0&3&-2&1\\0&3&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{③}+\text{②}\times(-1)}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&2&0\\0&3&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{②}\times\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&-2&2&0\\0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{①}\times\text{②}\times 2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&2&0&2\\1&-1&1&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{②}\times\frac{1}{2}]{\text{①}\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&1&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{③}+\text{①}\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&-1&0&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{④}+\text{②}\times(-1)]{\text{③}+\text{②}}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{③}\rightleftarrows\text{④}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{①}+\text{③}\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

12

$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$ と書ける. $A_1=\frac{1}{2}(A+A^T)$, $A_2=\frac{1}{2}(A-A^T)$ は $A_1^T=\frac{1}{2}(A+A^T)^T=\frac{1}{2}(A^T+A)=A_1$, $A_2^T=\frac{1}{2}(A-A^T)^T=\frac{1}{2}(A^T-A)=-A_2$ を満たすので A_1 は対称行列, A_2 は交代行列である。

こうして Aは対称行列と交代行列の和で表される。