線形代数及び演習II　演習プリントNo.2 解答 (9/30)　1/2

1. (1)

$$A \xrightarrow[\substack{②+①\times(-2)\\ ③+①\times(-1)}]{} \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&1&3\end{pmatrix} \xrightarrow[②\times(-\frac{1}{3})]{} \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix} \xrightarrow[③+②\times(-1)]{} \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&4\end{pmatrix} \xrightarrow[③\times\frac{1}{4}]{} \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{②+③\\ ①+③}]{} \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[①+②\times(-2)]{} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A)=3$$

(2)

$$A \xrightarrow[\substack{③+①\times(-2)\\ ②+①\times 2}]{} \begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-2&0\\0&1&3&4\\0&3&-1&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{③+②\times(-1)\\ ④+②\times(-3)}]{} \begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-2&0\\0&0&5&4\\0&0&5&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{④+③\times(-1)\\ ③\times\frac{1}{5}}]{} \begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-2&0\\0&0&1&4/5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{②+③\times 2\\ ①+③\times(-2)}]{} \begin{pmatrix}1&-1&0&-3/5\\0&1&0&8/5\\0&0&1&4/5\\0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[①+②]{} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&8/5\\0&0&1&4/5\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A)=3$$

(3)

$$A \xrightarrow[\substack{②+①\times(-3)\\ ③+①\times(-5)\\ \vdots\\ ⓝ+①\times(-2n+1)}]{} \begin{pmatrix}1&2\\0&-2\\0&-4\\ \vdots&\vdots\\0&-2n+2\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{③\times(-2)\\ ④\times(-3)\\ \vdots\\ ⓝ\times(-n+1)}]{} \begin{pmatrix}1&2\\0&-2\\0&0\\ \vdots&\vdots\\0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[]{\text{略}} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\ \vdots&\vdots\\0&0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A)=2$

2. (1) 係数行列

$$\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow[②+①\times\frac{1}{2}]{} \begin{pmatrix}2&3&1\\0&\frac{5}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow[②\times\frac{2}{5}]{} \begin{pmatrix}2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①+②\times(-3)\\ ①\times\frac{1}{2}}]{} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

より $\begin{cases}x-z=0\\ y+z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=c\\ y=-c\\ z=c\end{cases}$　解は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ （c: 任意の定数）

(2) 係数行列

$$\begin{pmatrix}1&-1&-4&1\\3&0&1&-2\\1&2&1&-3\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②+①\times(-3)\\ ③+①\times(-1)}]{} \begin{pmatrix}1&-1&-4&1\\0&3&13&-5\\0&3&5&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②\times\frac{1}{3}\\ ③\times\frac{1}{3}}]{} \begin{pmatrix}1&-1&-4&1\\0&1&\frac{13}{3}&-\frac{5}{3}\\0&1&\frac{5}{3}&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+②\times(-1)]{} \begin{pmatrix}1&-1&-4&1\\0&1&13/3&-5/3\\0&0&-\frac{8}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow[③\times(-\frac{3}{8})]{} \begin{pmatrix}1&-1&-4&1\\0&1&13/3&-5/3\\0&0&1&-\frac{1}{8}\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②+③\times(-\frac{13}{3})\\ ①+③\times 4}]{} \begin{pmatrix}1&-1&0&1/2\\0&1&0&-9/8\\0&0&1&-1/8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[①+②]{} \begin{pmatrix}1&0&0&-5/8\\0&1&0&-9/8\\0&0&1&-1/8\end{pmatrix}$$

より $\begin{cases}x-\frac{5}{8}u=0\\ y-\frac{9}{8}u=0\\ z-\frac{1}{8}u=0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}5/8\\9/8\\1/8\\1\end{pmatrix}$ （c: 任意定数）

3.

nが3の場合にする　(1) $m=1$ のとき $A=(1\ 2\ -3)$, $A'=(1\ 2\ -3\ -3)$

$\mathrm{rank}(A)=1=\mathrm{rank}(A')<3(=n)$ より (ii)の場合になり解は

$x+2y-3z=-3$ より $y=c_1$, $z=c_2$ とおくと $x=-3-2c_1+3c_2$

解は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ （c_1, c_2: 任意の定数）

(2) $m=2$ のとき

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[②+①]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[①+②\times(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A') = 2 < 3\ (=n)$ より ii) の場合 $\begin{cases} x - z = -3 \\ y - z = 0 \end{cases}$ より 解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c:\text{任意定数})$$

(3) $m=3$ のとき

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②+① \\ ③+①\times(-3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[③+②\times 10]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+③ \\ ①+②\times(-2) \\ ③\times 1/3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}(A') = 3 = \mathrm{rank}(A) + 1 = 2 + 1$ より iii) の場合で 解は存在しない。

4. (1) 拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ より}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_5 = 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} 1 - 2c_1 + c_2 \\ -2 + c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (c_1, c_2 \text{は任意定数})$$

(2) 拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}(A') \neq \mathrm{rank}(A)$ 解無し

5. 拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & a \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & b - \frac{a}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b - a + 1 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(A)$ となる条件は $2b - a + 1 = 0 \quad (a - 2b = 1)$.

6. (1)

$$(A\ I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{よって } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$(A\ I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{略}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

7.8 テキスト P37 問題2.4の4.と6.を見よ.