線形代数及び演習II 演習プリントNO.4 解答 (10.14)

1. テキストp64, 定理4.1.1を見よ。

2. ある $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$$

が成り立つとき $\{u_1, \dots, u_n\}$ は1次関係にある。この1次関係を満たすのが
$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のときのみなら1次独立で、そうでなければ
($c_1, \dots, c_n$ の中で0でないものが存在する場合) 1次従属である。

3. (1) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}c_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}c_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ より $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ を簡約化する

$A \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ より $\mathrm{rank}(A)=3$ よって $A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ は

$(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$ 以外に解を持たないので1次独立.

(2) (1)と同様に $A = \begin{pmatrix}3&2&5\\2&1&4\\1&3&-3\end{pmatrix}$ を簡約化する

$A \to \begin{pmatrix}1&3&-3\\2&1&4\\3&2&5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&-3\\0&-5&10\\0&-7&14\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&-3\\0&1&-2\\0&1&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(A) = 2 < 3$ なので1次従属

(3) $A = \begin{pmatrix}2&3&5&2\\4&1&1&0\\1&2&1&3\end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}\,A \leqq 3$ なので $\mathrm{rank}\,A < 4 =$ (ベクトルの個数)
1次従属

(4) $A = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}\,A = 3$ より1次独立

(5) $A = \begin{pmatrix}2&3&5\\1&2&4\\1&1&1\\4&1&-5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\2&3&5\\4&1&-5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&1&3\\0&-3&-9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(A) = 2 < 3$ より1次従属

(6) $A = \begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&1&1&0\\2&0&3&-1\\4&3&0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&1&1&0\\0&-2&-1&3\\0&-1&-8&9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\\0&0&-7&9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(A) = 4 =$ (ベクトルの個数) より1次独立.