線形代数及び演習II 演習プリント No.5 解答 (10.28) 1/2

1. $W=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=0\}$ とおく。 $A0=0$ より $0\in W$
次に $x_1, x_2\in W$ とすると $Ax_1=0$, $Ax_2=0$ よって $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=0$
∴ $x_1+x_2\in W$. 最後に $x\in W$, $c\in\mathbb{R}$ とすると $A(cx)=cAx=0$ より $cx\in\mathbb{R}$
よって W (すなわち $Ax=0$ を満たす全体) は部分空間である。

2. $\{v_1, v_2, \cdots v_m\}$ が1次独立で任意の $x\in V$ がこれらの1次結合で表される場合基である。または任意の $x\in V$ に対し $\{v_1, v_2, \cdots v_m, x\}$ が1次従属になる場合基である。

3. V の1次独立なベクトルの最大個数を V の次元という。

4. 仮定から $0\in W_1, W_2$ なので $0\in W_1\cap W_2$. 次に $x_1, x_2\in W_1\cap W_2$ とする。
$x_1, x_2\in W_1$ より W_1 の仮定から $x_1+x_2\in W_1$。同様に $x_1+x_2\in W_2$. よって $x_1+x_2\in W_1\cap W_2$.
最後に $x\in W_1\cap W_2$, $c\in\mathbb{R}$ とする。W_1 の仮定から $x\in W_1$ より $cx\in W_1$。同様に $cx\in W_2$.
∴ $cx\in W_1\cap W_2$. よって $W_1\cap W_2$ は部分空間

5 (1) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$ とおくと $W_1=\{x\in\mathbb{R}^3 : Ax=0\}$ 問1.より W_1 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間

(2) $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/9\\1/3\\1/6\end{pmatrix}$ ととると $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=\frac{2}{9}-1+\frac{1}{6}\leq 1\\3x_1+x_2+2x_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\leq 1\end{cases}$ より $x\in W_2$

しかし $2x$ は $3x_1+x_2+2x_3=2$ となるので $2x\notin W_2$ よって
$cx\notin W$ なる c が存在し部分空間でない

(3) $A=(2\ 1\ -2)$ とおくと $W_3=\{x\in\mathbb{R}^3 : Ax=0\}$ と表されるので
(1)と同様に部分空間

6. (1) 1次関係は $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ と表される。

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ より $\mathrm{rank}(A)=3$ で $A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
の解は $c_1=c_2=c_3=0$ しか存在しない。よって1次独立。

(2) 1次関係は (1)と同様に考えて $A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\3&-2&2&1\\-3&-1&1&5\end{pmatrix}$ とおいて $A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ と表される。

A を簡約化する $A\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&-2&2&4\\0&-1&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&4&4\\0&0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より
$\mathrm{rank}(A)=3<4$ (未知数の個数) より自明でない解 (c_1, c_2, c_3, c_4) が存在するので
1次従属。

(3) $f_1 = (1\ \ x\ \ x^2)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $f_2 = (1\ \ x\ \ x^2)\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ $f_3 = (1\ \ x\ \ x^2)\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$

と表されるので $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ のベクトルを調べればよい

$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\-2&-3&3\\1&1&2\end{pmatrix}$ を簡約化すると $A\to\begin{pmatrix}1&3&0\\0&3&3\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ より $\mathrm{rank}(A)=3$ よって $A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ は自明解しかもたないので

1次独立.

7 (1) $A=(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)=\begin{pmatrix}2&1&5&1&1\\1&0&3&1&0\\4&2&10&1&1\\3&1&8&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&0\\2&1&5&1&1\\4&2&10&1&1\\3&1&8&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&0\\0&1&-1&-1&1\\0&2&-2&-3&1\\0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&0\\0&1&-1&-1&1\\0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&-1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}(A)=3$ より1次独立な最大個数は3. 前から順に

$a_1, a_2\ a_4$ が1次独立 $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ より $a_3=3a_1-a_2$

$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ より $a_5=-a_1+2a_2+a_4$

(2) $(f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5)=(1\ \ x\ \ x^2\ \ x^3)\begin{pmatrix}1&2&1&1&0\\2&3&-1&1&3\\0&0&2&0&-2\\0&-1&0&-1&0\end{pmatrix}$ と表される.

$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&0\\2&3&-1&1&3\\0&0&2&0&-2\\0&-1&0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&0\\0&-1&-3&-1&3\\0&0&2&0&-2\\0&-1&0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&0\\0&1&3&1&-3\\0&0&1&0&-1\\0&0&3&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}(A)=3$ より最大個数は3 前から順に $f_1, f_2\ f_3$ が1次独立

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ より $f_4=-f_1+f_2$ $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ より $f_5=f_1-f_3$

8 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\3&3&2&-1\end{pmatrix}$ とおくと $W=\{x\in\mathbb{R}^4 : Ax=0\}$ と表される.

$Ax=0$ を解く $A\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&0&5&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1/5\\0&0&1&-4/5\end{pmatrix}$ より $\begin{cases}x_1+x_2+\frac{1}{5}x_4=0\\ x_3-\frac{4}{5}x_4=0\end{cases}$

$x_1=-x_2-\frac{1}{5}x_4$ $x_3=\frac{4}{5}x_4$ より $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\0\\4/5\\1\end{pmatrix}$ よって $\dim W=2$ で

基は $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/5\\0\\4/5\\1\end{pmatrix}\right\}$

9. $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ とすると u_1 と u_2, u_2 と u_3, u_1 と u_3 はそれぞれ1次独立だが u_1, u_2, u_3 は1次独立でないので命題は間違いである。