線形代数BII 演習II 宿題プリント No.6 解答 (11.11)

1.

$A=\begin{pmatrix}1&4&1&-3\\1&0&2&-2\\1&1&4&-3\\1&7&-2&-3\end{pmatrix}$ を簡約化する。

$A\to\begin{pmatrix}1&4&1&-3\\0&-4&1&1\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&1&-3\\0&1&-1&0\\0&-4&1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&1&-3\\0&1&-1&0\\0&0&-3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&4&0&-8/3\\0&1&0&-1/3\\0&0&1&-1/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-4/3\\0&1&0&-1/3\\0&0&1&-1/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{cases}x_1-\frac{4}{3}x_4=0\\x_2-\frac{1}{3}x_4=0\\x_3-1/3\,x_4=0\end{cases}$

次元は1で 基は $\left\{\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\left(\left\{\begin{pmatrix}4\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}\text{でもよい。}\right)$

2

$a_2=c_1a_1+c_2a_3$ となる c_1, c_2 を求める。

書き直すと $c_1a_1-a_2+c_2a_3=(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}c_1\\-1\\c_2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

$A=(a_1\ a_2\ a_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-1&3\\-1&1&1\\-2&2&2\end{pmatrix}$ を簡約化

$A\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\-1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+2c_2\\-1+3c_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ より $c_2=\frac{1}{3}$, $c_1=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ a_2=-\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}a_3$

(別解) 簡約化された行列から $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

よって $a_3=2a_1+3a_2$ $a_2=\frac{1}{3}(a_3-2a_1)=-\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}a_3$