1. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{32}\end{pmatrix}$ $\therefore Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{22}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ca_{31}&ca_{32}&ca_{33}\end{pmatrix}$ $\therefore Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ca_{21}+a_{31}&ca_{22}+a_{32}&ca_{23}+a_{33}\end{pmatrix}$ $\therefore Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}$

4. テキストp85 定理4.4.5の証明を見よ.

5. $\dim V=3$ であるから f_1, f_2, f_3 が1次独立であることを示せばよい.

$f_1=(1\ x\ x^2)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $f_2=(1\ x\ x^2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $f_3=(1\ x\ x^2)\begin{pmatrix}3\\-6\\7\end{pmatrix}$ より

$A=\begin{pmatrix}2&0&3\\-1&0&-6\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&-6\\2&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-4\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-4\\0&0&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(A)=3$ なので 1次独立.

6. (1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&1&0&2\\2&1&2&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-1&1\\0&-1&0&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&3&-3\\0&-2&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&3&-3\\0&0&0&5&-5\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&2\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&2\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$ より $\begin{cases}x_1+x_3+2x_5=0\\x_2=0\\x_4-x_5=0\end{cases}$ $x_3=c_1$, $x_5=c_2$

とおくと $x_1=-c_1-2c_2$, $x_4=c_2$ よって $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}c_2$

次元は2で基は $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

(2) (1)と同様に $A=\begin{pmatrix}3&2&2&4&-1\\1&2&3&1&-5\\1&1&5&-10&6\end{pmatrix}$ とおいて $Ax=0$ を解く

$A\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&-5\\3&2&2&4&-1\\1&1&5&-10&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&-5\\0&-4&-7&1&14\\0&-1&2&-11&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&-5\\0&1&-2&11&-11\\0&4&7&-1&-14\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&-5\\0&1&-2&11&-11\\0&0&15&-45&30\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&-5\\0&1&-2&11&-11\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&10&-11\\0&1&0&5&-7\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&5&-7\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$

より

$$\begin{cases} x_1 + 3x_5 = 0 \\ x_2 + 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \end{cases} \text{とおくと} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$$

次元は2で 基は $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ と表される. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

とおくと $A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -15 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$

次元は2で 基は $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

7 $A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ を簡約化 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1次独立なベクトルの最大個数は3.

a_3 は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $a_3 = -2a_1 + a_2$ と表される

よって $a_1 = \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 \quad \left(= \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 + 0 \cdot a_4 \right)$ と表される.

8 テキストp78. 定理4.3.6を見よ

9 $v_1 = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$v_4 = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より $(v_1\ v_2\ v_3\ v_4) = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)A$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ と書ける. 8.より A が正則かどうか調べる.

$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -21 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ よって $\mathrm{rank}(A) = 4$ で Aは正則

8より v_1, v_2, v_3, v_4は1次独立