



線形代数及その演習Ⅱ 宿題7011次No.7 解答 (11.18)

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{簡約化}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \text{rank}(A) = 2$$

途中省略

$$\therefore \dim(\text{Im}(T_A)) = 2 \quad \text{よって} \quad \dim(\text{Ker}(T_A)) = 4 - 2 = 2$$

(像の次元) (核の次元)

$\text{Im}(T_A)$ の基として $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{Ker}(T_A)$ の基を求めるため $Ax = 0$ を解く

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x_3 = c_1, x_4 = c_2 \text{ とおくと} \\ x_1 = c_1 - c_2 \\ x_2 = 2c_1 - c_2 \end{cases}$$

解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{と表すことができる}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{が } \text{Ker}(T_A) \text{ の基}$$