線形代数及び演習Ⅱ 演習プリント No.7 解答 (11.18)

1. T が (i) $T(u+w) = T(u) + T(w)$ $(u, w \in U)$ (ii) $T(cu) = cT(u)$ $(u \in U,\ c \in \mathbb{R})$ を満たすとき線形写像という。

2. $T_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$
$T_A(cx) = A(cx) = cAx = cT_A(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R})$ より 1. の定義を満たすから T_A は線形写像

3. $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の標準基底をそれぞれ $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $\{e_1', e_2', \cdots e_m'\}$ とする。
任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ について $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ と表されるので
$T(x) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n) = (T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ となる
$T(e_1) = a_{11} e_1' + a_{21} e_2' + \cdots + a_{m1} e_m'$, $T(e_2) = a_{12} e_1' + a_{22} e_2' + \cdots + a_{m2} e_m'$
$\cdots$ $T(e_n) = a_{1n} e_1' + a_{2n} e_2' + \cdots + a_{mn} e_m'$
と表すと
$$(T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ となりこれを A とおくと
$$T(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax \quad //$$

4. $\mathrm{Im}(T_A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = Ax \ (x \in \mathbb{R}^n)\}$, $\mathrm{Ker}(T_A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$
$\mathrm{Im}(T_A)$ が部分空間になることを示す $0 = A0$ より $0 \in \mathrm{Im}(T_A)$
$y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(T_A)$ なら $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ となる $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ が存在する
$y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$ より $y_1 + y_2 \in \mathrm{Im}(T_A)$. また $y \in \mathrm{Im}(T_A)$
$c \in \mathbb{R}$ に対して $y = Ax$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在するので $cy = cAx = A(cx)$
より $cy \in \mathrm{Im}(T_A)$ よって $\mathrm{Im}(T_A)$ は部分空間. $\mathrm{Ker}(T_A)$ の証明は省略.

5. $\dim \mathrm{Im}(T_A) = \mathrm{rank}(A)$, $\dim \mathrm{Ker}(T_A) = n - \mathrm{rank}(A)$ を使う ($A: m \times n$ 行列)

(1) A を簡約化 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to$
$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ よって $\mathrm{rank}(A) = 2$ より $\dim \mathrm{Im}(T_A) = 2$, $\dim \mathrm{Ker}(T_A) = 4 - 2 = 2$

(2)
$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\mathrm{rank}(A) = 3.$ $\dim \mathrm{Im}(T_A) = 3.$ $\dim \mathrm{Ker}(T_A) = 5-3 = 2$

(3)
$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & -12 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A) = 2$ $\dim \mathrm{Im}(T_A) = 2$ $\dim \mathrm{Ker}(T_A) = 5-2 = 3.$

6

(1) Aを簡約化した行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ これより $\mathrm{Im}(T_A)$の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

がとれる. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くと $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ より $x_2 = c_1,\ x_4 = c_2$ とおいて

$x_1 = -2c_1 + c_2,\ x_3 = -c_2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$ より $\mathrm{Ker}(T_A)$の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(2) 同様に $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底として最初の2つの列と第5列をとれば $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$ より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2$ より

$\mathrm{Ker}(T_A)$の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(3) $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く $\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_3$ より $\mathrm{Ker}(T_A)$の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

7. 任意の $u \in U$ は $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 = (u_1\ u_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ と表されるから

$T(u) = T(x_1 u_1 + x_2 u_2) = x_1 T(u_1) + x_2 T(u_2) = x_1 (a v_1 + b v_2) + x_2 (c v_1 + d v_2)$

$= (a x_1 + c x_2) v_1 + (b x_1 + d x_2) v_2 = (v_1\ v_2) \begin{pmatrix} a x_1 + c x_2 \\ b x_1 + d x_2 \end{pmatrix} = (v_1\ v_2) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

よって T の表現行列は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

8.

$y = T(x) = Ax$ について、 $y = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$

$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ と表すことができるから

$$y = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = A(v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$P = (v_1\ v_2\ v_3)$ とおくと $P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = AP\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

表現行列は $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&-1&2\\0&-3&5\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}$ で与えられる

これを計算する

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\3&1&1&0&0&1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&-2&1&-3&0&1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&1&-1&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right)$$

$\therefore\ P^{-1} = \begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ $\quad P^{-1}A = \begin{pmatrix}1&4&-3\\1&-5&5\\-3&-6&6\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&4&-3\\1&-5&5\\-3&-6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2&1\\6&1&0\\3&-3&0\end{pmatrix}$$ ……(答)