線形代数及び演習II　演習プリント No.8 解答　(11.25)

1

(1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$　$F(\boldsymbol{a})=A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$

(2) $F(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)-F(\boldsymbol{e}_2)=F(2\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$　$F(\boldsymbol{e}_1)=\frac{1}{2}F(2\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 3\end{pmatrix}$

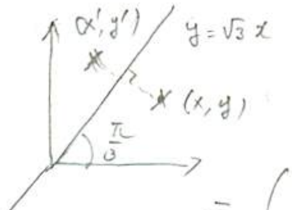
2. (1) $\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

3 (1) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ より直線 $y=x$ に関する対称移動

(2) $\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ より $\frac{\pi}{2}$ (90°) 回転移動

(3) $\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2})\\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ より $-\frac{\pi}{2}$ 回転移動 (または $\frac{3}{2}\pi$ 回転)

4.



$-\frac{\pi}{3}$ 回転させ x軸に対して対称移動した後で $\frac{\pi}{3}$ 回転移動すればよい。$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3})\\ \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3})\end{pmatrix}$

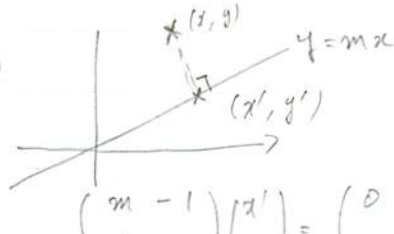
$=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt3/2\\ \sqrt3/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt3/2\\ -\sqrt3/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt3/2\\ \sqrt3/2 & 1/2\end{pmatrix}$

(別解) $\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)$ が $y=\sqrt3x$ 上にある条件 $\frac{y+y'}{2}=\sqrt3\cdot\frac{x+x'}{2}$ と $\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{1}{\sqrt3}$

より $\begin{cases}\sqrt3x'-y'=y-\sqrt3x\\ x'+\sqrt3y'=x+\sqrt3y\end{cases}$　$\begin{pmatrix}\sqrt3 & -1\\ 1 & \sqrt3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt3 & 1\\ 1 & \sqrt3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt3 & -1\\ 1 & \sqrt3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-\sqrt3 & 1\\ 1 & \sqrt3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt3/2\\ \sqrt3/2 & 1/2\end{pmatrix}$

5. (1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (2)



$y'=mx'$　$\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{1}{m}$

より $\begin{cases}mx'-y'=0\\ x'+my'=x+my\end{cases}$　$\begin{pmatrix}m & -1\\ 1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & -1\\ 1 & m\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}m & 1\\ -1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1 & m\\ m & m^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　$\therefore\ \begin{pmatrix}\frac{1}{m^2+1} & \frac{m}{m^2+1}\\ \frac{m}{m^2+1} & \frac{m^2}{m^2+1}\end{pmatrix}$

6. $\boldsymbol{x}_0$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{a}$ を持つ直線は $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a}$ ($t\in\mathbb{R}$) と表される。線形変換を表す行列を A　$\boldsymbol{y}(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ とおくと $\boldsymbol{y}(t)=A(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a})=A\boldsymbol{x}_0+tA\boldsymbol{a}$ よって点 $A\boldsymbol{x}_0$ を通り方向ベクトル $A\boldsymbol{a}$ を持つ直線に移される