線形代数及び演習II　宿題プリント No. 9　解答　(12.09)

1.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\{(\lambda+2)(\lambda-1)-\lambda-1\} - (1-\lambda-1-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-3)+2\lambda = -\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6 = -(\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$$ より $\lambda = 1,\ 3,\ -2$ ・・・固有値

$\lambda=1$ のとき

$$A-I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より $x+z=0$, $y=0$

より $\begin{cases} x=-c \\ y=0 \\ z=c \end{cases}$

固有空間 $\left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c : c \in \mathbb{R} \right\}$

$\lambda=3$ のとき

$$A-3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より $x-\frac{3}{2}z=0$, $y-\frac{1}{2}z=0$　$\begin{cases} x=\frac{3}{2}c \\ y=\frac{1}{2}c \\ z=c \end{cases}$　固有空間 $\left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} c : c \in \mathbb{R} \right\}$

$\lambda=-2$ のとき

$$A+2I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より $\begin{cases} x+z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$　$\begin{cases} z=c \\ x=-c \\ y=3c \end{cases}$　固有空間 $\left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} c : c \in \mathbb{R} \right\}$

2.

$P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ と対角化される.

($P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ など P のおき方で対角化された行列が異なる.)