線形代数及び演習II 演習プリント No.9 解答 No. (12.09)

1. $T(u) = \lambda u$ $(u \in V,\ u \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R})$ を満たす λ を T の固有値
u を（λ に対する）T の固有ベクトルという。

2.

(1) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3)+3 = \lambda^2+\lambda-3=0$ $\quad \lambda = \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(2) $|tI-A| = \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t-2)(t+3)-2 = t^2+t-8=0$ $\quad t = \dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$

3. ケイリー・ハミルトンの定理を使う

(1) 固有多項式は $|tI-A| = (t-2)(t+3)-4 = t^2+t-10$ より $A^2+A-10I=0$

$f(A) = 2A^2-A-15I = 2(A^2+A-10I)-3A+5I = -3A+5I = \begin{pmatrix} -6+5 & -12 \\ -3 & 9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -12 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}$

(2) 固有多項式は t^2+t-8 より $A^2+A-8I=0$

$f(A) = A^2+2A-8I = (A^2+A-8I)+A = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

4. 省略（テキストP105, 問5.3の5参照）

5. (1) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3)=0$ $\quad (A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解く

$\lambda=2$ のとき $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$, $\lambda=3$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$ $\quad$ 固有値 $\lambda=2$, 固有空間 $\left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$

固有値 $\lambda=3$, 固有空間 $\left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$

(2)

$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-(1-\lambda)] - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)=0$ より

$\lambda = 1, -2$. $\quad$ $\lambda=1$ のとき $(B-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解く

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $x-y+z=0$ $\quad$ $y=c_1,\ z=c_2$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}c_2$

$\lambda=-2$ のとき $B+2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

$z=c$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}c$. よって固有値 $\lambda=1$ に対する固有空間は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}c_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

固有値 $\lambda=-2$ に対する固有空間は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}c : c \in \mathbb{R} \right\}$

(3) $\det(D-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) - (1-2+\lambda)$

$= (3-\lambda)(\lambda-1)^2-(\lambda-1) = (\lambda-1)(-\lambda^2+4\lambda-3-1) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$

よって固有値は $\lambda=1,\ 2.$ 　$\lambda=1$のとき $D-I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$より

$x=0,\ y+z=0$ よって $z=c$とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}c$ 　固有空間 $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}c : c\in\mathbb{R}\right\}$

$\lambda=2$のとき $D-2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$より $x+y=0,\ z=0$

$y=c$とおいて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c$ 　固有空間は $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c : c\in\mathbb{R}\right\}$

6. $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -7 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3)+7 = \lambda^2-\lambda+1$ 　ケイリー・ハミルトンの定理より $A^2-A+I=O$ また $(A+I)(A^2-A+I) = A^3+I = O$

(1) $f(A) = A^{15} = (A^3)^5 = (-I)^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $f(A) = A^{12}+A^7-I = (A^3)^4 + A^6A - I = (-I)^4 + (-I)^2A - I$

$= A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

7. 正方行列Aが対角化できるとは 正則行列Pと対角行列Bが存在して $B=P^{-1}AP$ と表すことができることをいう。

8.

(1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と対角化できる.

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ と対角化できる

(3) 固有値 $\lambda=1,2$ に対する
固有空間の次元は それぞれ 1 なので 対角化できない