線形代数及び演習II 演習プリント No.11 (解答) (12.16) 1/2

1. $(a, b) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ \left(= \sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)$

2. $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$

3. (1) $\|u+v\|^2 = (u+v, u+v)$, $\|u-v\|^2 = (u-v, u-v)$ を使って確めよ。

(2) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff (u,v)=0 \iff u \perp v$

(3) $u+v \perp u-v \iff (u+v, u-v) = 0 \iff \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \iff \|u\| = \|v\|$

4. 教科書 p114 定理6.1.19 証明を見よ.

5. Pが直交行列であるとは $P^TP = I$ を満たすときをいう。

6. $A = (a_1\ a_2 \cdots a_n)$ が直交行列 $\iff A^TA = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}(a_1 \cdots a_n) = (a_i^Ta_j)_{1\le i,j\le n} = I$

$\iff a_i^Ta_j = (a_i, a_j) = \delta_{ij}\ (1 \le i,j \le n) \iff \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基

7. (1) $a_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ -\sqrt5/\sqrt6 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} \sqrt5/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \end{pmatrix}$ とおくと 行列は $(a_1\ a_2)$ と表される $\|a_1\| = \|a_2\| = 1$, $(a_1, a_2) = 0$ より問6から 直交行列

(2) $a_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 0 \\ 2/\sqrt6 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt2 \\ -1/\sqrt6 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt6 \end{pmatrix}$ が正規直交基であることを確める.
すなわち $(a_i, a_j) = \delta_{ij}$ を確めよ.

(3) $a_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ が正規直交基であることを確める.

8. (1) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ 2/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \end{pmatrix}$, $\tilde{v}_2 = v_2 - (v_2, u_1)u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{\sqrt6}\begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ 2/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \dfrac{\sqrt2}{5}\begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt2}{10} \\ -\frac{2\sqrt2}{5} \\ \sqrt2/2 \end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ 2/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3\sqrt2/10 \\ -2\sqrt2/5 \\ \sqrt2/2 \end{pmatrix}$

(2) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \end{pmatrix}$, $\tilde{v}_2 = v_2 - (v_2, u_1)u_1$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{\sqrt3}\begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ $u_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \dfrac{3}{\sqrt6}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \\ -2/\sqrt6 \end{pmatrix}$

$\tilde{v}_3 = v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{\sqrt3}\begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \end{pmatrix} - \left(-1/\sqrt6\right)\begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \\ -2/\sqrt6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac12 \\ -\frac12 \\ 0 \end{pmatrix}$

∴ 正規直交化されたベクトルは $\begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \\ -2/\sqrt6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix}$

9. Aを直交行列とする すなわち $A^TA = I$

$$\|A\mathbf{u}\|^2 = (A\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = (A^TA\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (I\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$$

よって $\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$ が任意の $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して成立つ.

10.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$= (\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \qquad \lambda = -1, 3$ ‥固有値

$\lambda = -1$ のとき $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

$\lambda = 3$ のとき $(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} c$ $(c \neq 0)$

よって 固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とると

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は直交行列で $P^TAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と対角化される