線形代数及び演習II 宿題プリント No.11 解答 (12.23)

1

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

よって $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\{(2-\lambda)^2 - 1\} - (2-\lambda-1) + (1-(2-\lambda))$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) + \lambda - 1 + \lambda - 1 = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) + 2(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6 + 2) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0$$

$\lambda = 1, 4, \cdots$ 固有値

$\lambda = 1$ のとき $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

固有空間 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を正規直交化する. $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{v}_2 = v_2 - (v_2, u_1)u_1$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{v_2}{\|\hat{v}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \right)$$

よって $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ （正規直交系のとり方は一通りでない $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ なども可）

$\lambda = 4$ のとき $A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c \quad (c \neq 0)$ よって $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

直交行列を $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ととると $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と対角化される

$\left(P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ととれば } P^TAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$