線形代数及び演習II 演習プリント No.11 解答 (12.23) 1/2

1 A: 実対称行列, $\bar{x}$ を x の複素共役とする.

$Ax=\lambda x$ ($x\neq 0$) とすると $\bar{A}=A$ より $\overline{Ax}=A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}$

$\bar{\lambda}\bar{x}^T x=(\bar{\lambda}\bar{x})^T x=(A\bar{x})^T x=\bar{x}^T A^T x=\bar{x}^T A x=\bar{x}^T(\lambda x)=\lambda\bar{x}^T x$

$\bar{x}^T x=\|x\|^2\neq 0$ より $\lambda=\bar{\lambda}$ これは λ が実数であることを意味している. //

2 $Ax_1=\lambda_1 x_1,\ Ax_2=\lambda_2 x_2$ ($x_1\neq 0, x_2\neq 0$) とする

$\lambda_1(x_1,x_2)=(\lambda_1 x_1,x_2)=(Ax_1,x_2)=(x_1,A^T x_2)=(x_1,Ax_2)=(x_1,\lambda_2 x_2)$

$=\lambda_2(x_1,x_2)$ $\quad\therefore(\lambda_1-\lambda_2)(x_1,x_2)=0$ $\quad\lambda_1\neq\lambda_2$ より $(x_1,x_2)=0$ よって

$x_1\perp x_2$ //

3 (1) $|A_1-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 4-\lambda & 3\\ 0 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)\{(4-\lambda)(1-\lambda)-9\}-(1-\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda-5-1)=(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-6)=0$

$\lambda=1,-1,6$ … 固有値 $\quad\lambda=1$ のとき $A_1-I=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&3&3\\0&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

より 固有ベクトル $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3c_1\\0\\c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}c$ ($c\neq 0$) $\quad\lambda=-1$ のとき $A_1+I=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&5&3\\0&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&3\\2&1&0\\0&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&3\\0&-9&-6\\0&3&2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&5&3\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&2/3\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}c$ ($c\neq 0$)

$\lambda=6$ のとき $A_1-6I=\begin{pmatrix}-5&1&0\\1&-2&3\\0&3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\-5&1&0\\0&3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&-9&15\\0&3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&3&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&-5/3\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}c$ ($c\neq 0$)

よって 直交行列 $P=\begin{pmatrix}-3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{35}\\ 0 & -2/\sqrt{14} & 5/\sqrt{35}\\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{14} & 3/\sqrt{35}\end{pmatrix}$ によって $P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

と対角化される。

(2) $|A_2-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1-(2-\lambda)&2-\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1+(2-\lambda)^2&-1-(2-\lambda)\\-1&2-\lambda&-1\\0&\lambda-3&3-\lambda\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda^2-4\lambda+3&\lambda-3\\\lambda-3&-(\lambda-3)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(\lambda-3)(\lambda-1)&\lambda-3\\\lambda-3&-(\lambda-3)\end{vmatrix}=-(\lambda-3)^2(\lambda-1)-(\lambda-3)^2=-(\lambda-3)^2\lambda=0$

より $\lambda=0,\ 3$ … 固有値 $\quad\lambda=0$ の時 $A_2=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&-3&3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}c$ ($c\neq 0$) 正規化したベクトル $\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\lambda=3$ のとき $A-3I=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1-c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}c_2$

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ を正規直交化すると $v_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\1/\sqrt2\\0\end{pmatrix}$ $\tilde v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\1\end{pmatrix}$

より $v_2=\dfrac{\tilde v_2}{\|\tilde v_2\|}=\dfrac{\tilde v_2}{\sqrt{\frac24+1}}=\dfrac{2}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6\\-1/\sqrt6\\2/\sqrt6\end{pmatrix}$ よって

直交行列 $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt3&-1/\sqrt2&-1/\sqrt6\\1/\sqrt3&1/\sqrt2&-1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&2/\sqrt6\end{pmatrix}$ によって $P^TAP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

と対角化される.

5 (1) $g(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ を直交行列で対角化

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$ $\lambda=-1,3$ …固有値

$\lambda=-1$ のとき $A+I=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 固有ベクトル $\lambda=3$ のとき $A-3I=\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}$ より

固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ よって $\underbrace{P}_{\text{直交行列}}=\begin{pmatrix}1/\sqrt2&-1/\sqrt2\\1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ と変換すると

$g=(u_1\ u_2)\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\ (=3u_1^2-u_2^2)$

6. $g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-4x_3x_1$

$=x_1(x_1-x_2-2x_3)+x_2(-x_1-x_3)+x_3(-2x_1-x_2+x_3)$

$=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}x_1-x_2-2x_3\\-x_1-x_3\\-2x_1-x_2+x_3\end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&0&-1\\-2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

4. $g(x_1,x_2)=x_1(ax_1+bx_2)+x_2(bx_1+cx_2)=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\bx_1+cx_2\end{pmatrix}$

$=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$