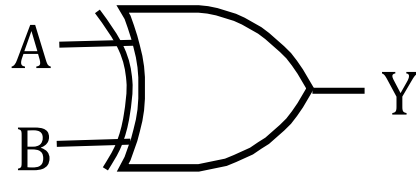


# XOR論理ゲート

- 回路記号



- 論理式

$$Y = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B = A \oplus B$$

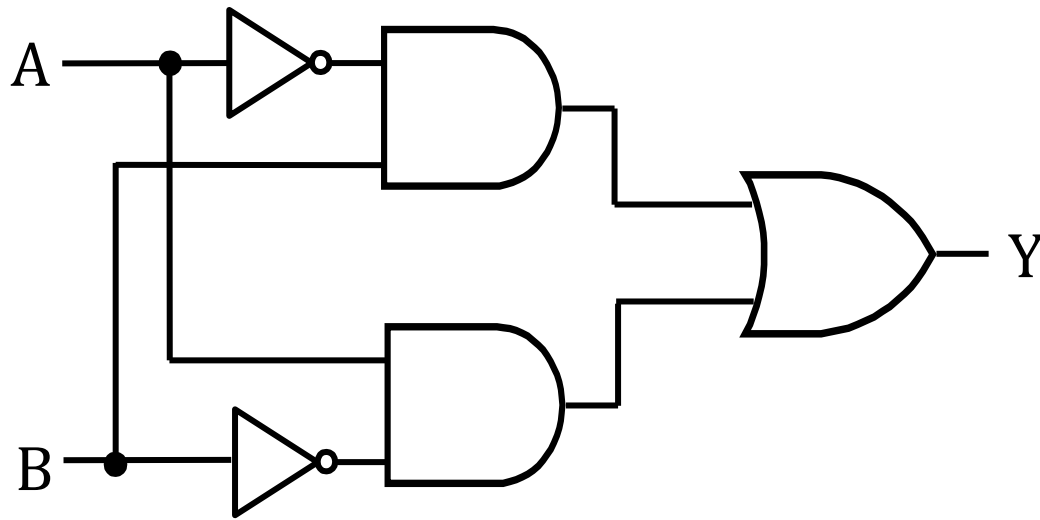
- 真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# AND,OR,NOTでどう実現できる？

- 次のスライドでわかるが、構造がある程度複雑で直感で簡単に作成できるものではない

# AND,OR,NOTでどう実現できる？



$$Y = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B = A \oplus B$$

# 演習08-1

- 問題は次のスライド参照
- manaba, 10分
- 8点を4点に換算

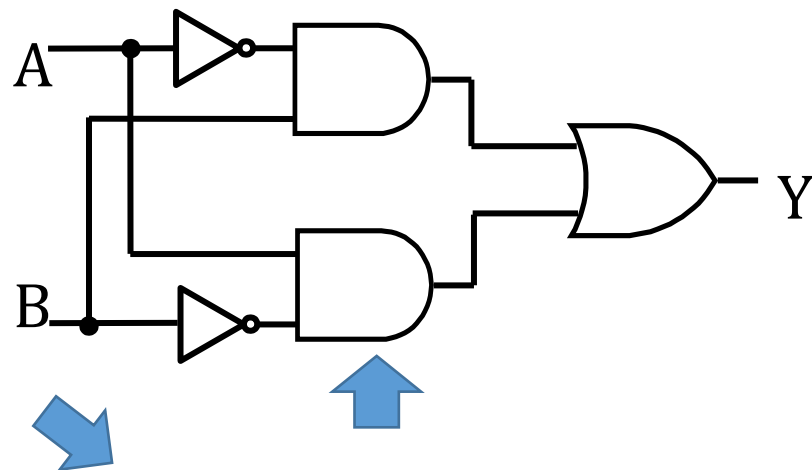
# 真理値表 → 論理式 → 論理回路

- 以上から論理回路・論理式から真理値表を求めるのは簡単であることがわかる。しかし逆はそうではない
- 真理値表から論理式を「**加法標準形**」と呼ばれる方法で求められることができる
  - Y=1に着目して「最小項」を作成し、最小項を加算する(論理和にする)
  - 下記の例では、 $A \cdot \bar{B}$ などが項数が1で最小項となる( $A+B$ なら項数が2で最大項)

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	Y	最小項
0	0	0	
0	1	1	$\bar{A} \cdot B$
1	0	1	$A \cdot \bar{B}$
1	1	0	



$$Y = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

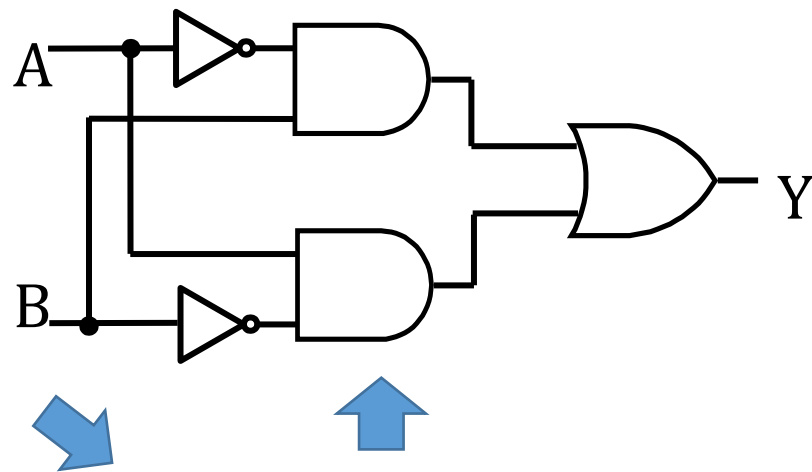
# 真理値表 → 論理式 → 論理回路

- 以上から論理回路・論理式から真理値表を求めるのは簡単であることがわかる。しかし逆はそうではない
- 真理値表から論理式を「**乗法標準形**」と呼ばれる方法で求められることができる
  - Y=0に着目して「最大項」を作成し、最大項を論理積にする

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	Y	最大項
0	0	0	$A + B$
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	$\bar{A} + \bar{B}$



$$Y = (A + B)(\bar{A} + \bar{B}) \\ = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$Y = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$ に対応する  
XOR論理回路は？

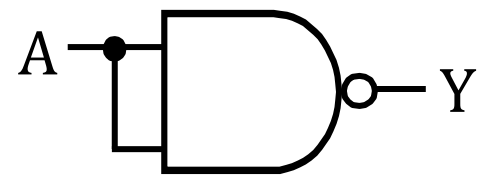
# 論理ゲートNANDについて

- 前回講義資料の参考ページ「論理ゲートの実装」にもあるように、実用上ICの品種として論理ゲートNANDが多い
- 実際、すべての論理ゲートをNANDゲートで実現できる

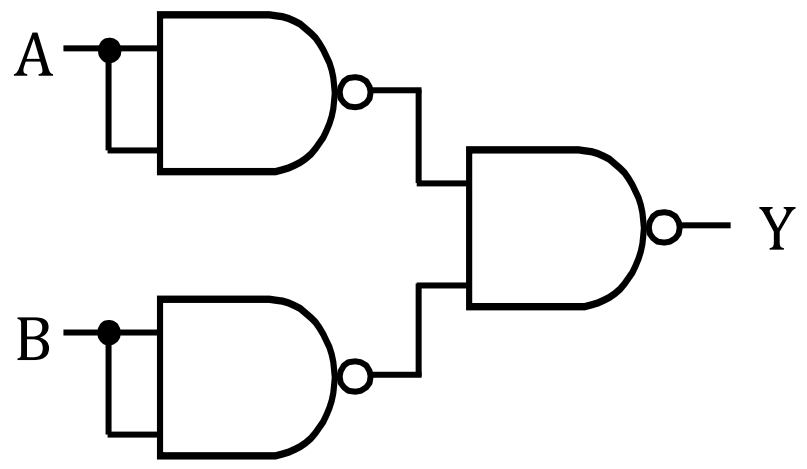


# NANDですべての論理ゲートが 実現(作成)できる

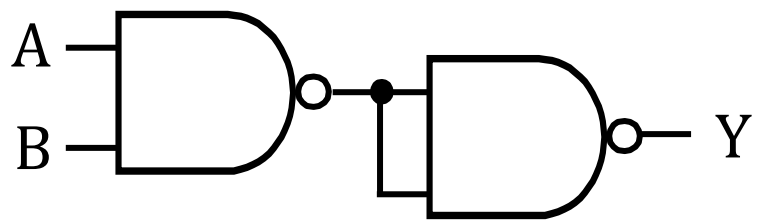
NOT



OR



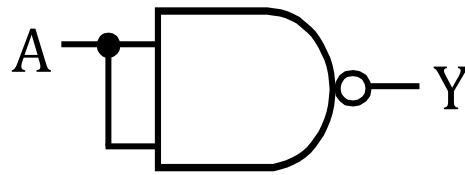
AND



# これらって本当に正しいのか？

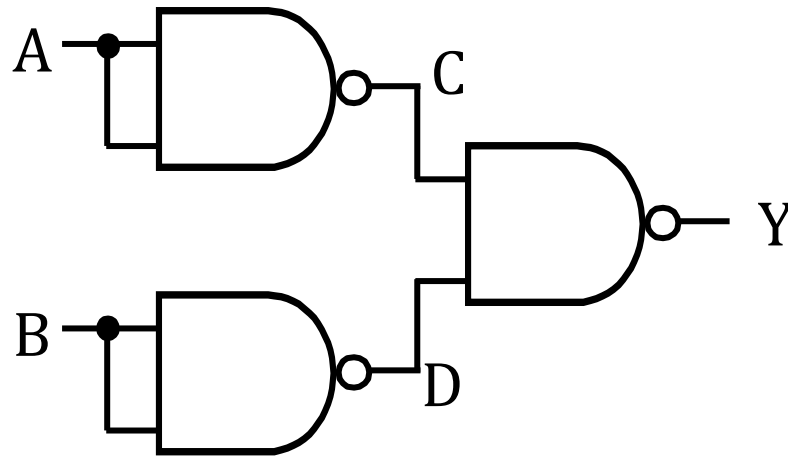
- 真理値表をもとめて確認することができる

演習：下記回路の真理値表をもとめ、NOTであることを証明しなさい



A	A	Y

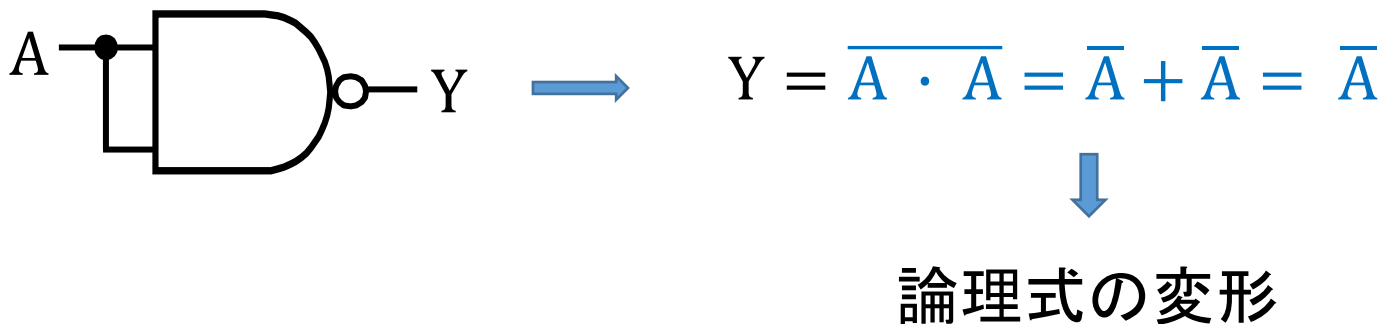
演習：下記回路の真理値表をもとめ、ORであることを証明しなさい



A	B	C	D	Y
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			1

# ほかに証明する方法はないか？

- 真理値表をもとめれば証明できるが、ほかに方法はないだろうか。
- 回路→論理式→論理式の変形で証明することも可能



# 論理式の変形

# 論理式の変形(公理)

- 恒等則

$$A \cdot 1 = A, A + 0 = A$$

- 交換則

$$A \cdot B = B \cdot A, A + B = B + A$$

- 相補則

$$A \cdot \bar{A} = 0, A + \bar{A} = 1 \quad (Aと\bar{A}が互いの補元)$$

- 結合則

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), (A + B) + C = A + (B + C)$$

- 分配則

$$\textcircled{1} (A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$$

$$\textcircled{2} (A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

分配則以外は自明。  
分配則については  
C=0, 1を代入して考え  
ればわかる

# 論理式の変形(定理)

- べき等則

$$A \cdot A = A, A + A = A, A + 1 = 1, A \cdot 0 = 0$$

- 二重否定

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- 吸収則

$$A \cdot (A + B) = A, A + (A \cdot B) = A$$

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B, A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$

- ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

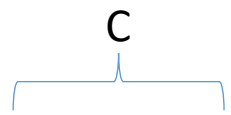


# 乗法標準形で求めたXORの式変形の証明

- 以下の式変形が成り立つことを論理式変形の公理・定理を使って証明しなさい

$$Y = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

# 乗法標準形で求めたXORの式変形の証明

$$Y = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$


分配則②

分配則②など

$$= (A + B)\bar{A} + (A + B)\bar{B} = B\bar{A} + A\bar{B}$$

注意:ここでは論理積の演算子「 $\cdot$ 」を省略している。  
今後、混乱が生じない限り断りなく省略する場合がある

# 演習

- 吸収則  $A \cdot (A + B) = A$  を論理式変形の公理・(それより前にある)定理を用いて証明しなさい

# 演習

- 吸収則  $A + (\bar{A} \cdot B) = A + B$  を論理式変形の公理・  
(それより前にある) 定理を用いて証明しなさい

# 演習

- 以下のド・モルガンの法則①を真理値表で証明しなさい

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B} \quad \dots \textcircled{2}$$

# ド・モルガンの法則①の証明

- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ を証明するためには、 $A \cdot B$ が $\bar{A} + \bar{B}$ の補元であることを証明すればよい。つまり、

$$\begin{aligned} A \cdot B + (\bar{A} + \bar{B}) &= 1 \\ (A \cdot B) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{を証明できればよい}$$



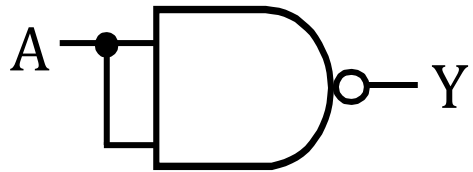
以下省略。授業でノートを取ってください。

# ド・モルガンの法則②の証明

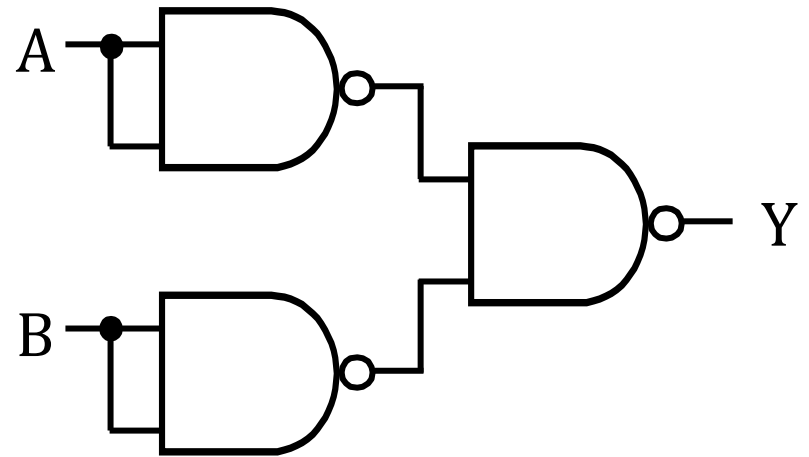
- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ の証明はド・モルガンの法則①を利用すると簡単にできる

# NANDですべての論理ゲートが 実現(作成)できる

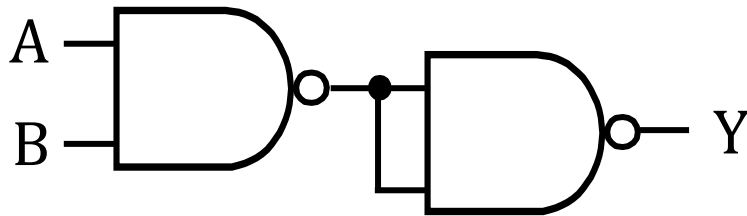
NOT



OR



AND





NOTはなぜNANDで作れるか？

$$Y = \bar{A}$$

# NOTはなぜNANDで作れるか？

$$Y = \bar{A} = \boxed{\bar{A} + \bar{A} = \overline{A \cdot A}}$$

べき等則

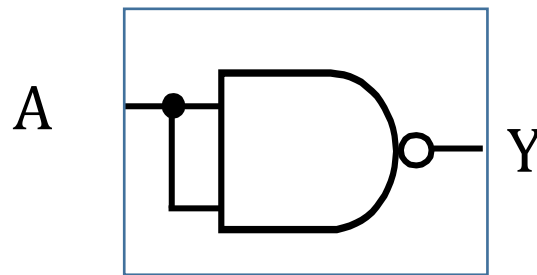
ド・モルガンの法則①

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

# NOTはなぜNANDで作れるか？

$$Y = \bar{A} = \bar{A} + \bar{A} = \boxed{\overline{A \cdot A}}$$

AとAについてNANDを行う



NOT

ANDはなぜNANDで作れるか？

$$Y = A \cdot B$$

# ANDはなぜNANDで作れるか？

ド・モルガンの法則①

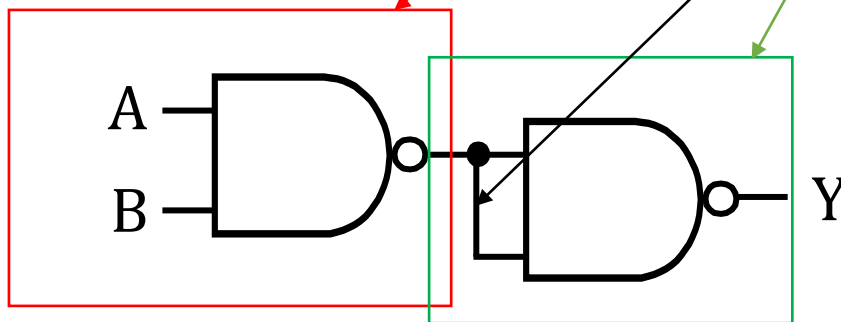
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$Y = A \cdot B = A \cdot B + A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} + \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot B}$$

↑  
べき等則

NAND

NAND



AND

# 演習08-2

- ORはなぜNANDで作れるか
- manabaレポート
- 提出締め切り: 翌週火曜日12:30
- 5点