楕円型・放物型微分方程式研究集会
(Workshop on Elliptic & Parabolic PDEs 2022)

日時： 2022 年 11 月 24 日 (木) 13:30 〜 19:00

場所： 龍谷大学 瀬田キャンパス 1 号館 ５ ３ ４演習室

—プログラム—

11 月 24 日 (木)

13:30 – 14:20 渡辺 達也 (京都産業大学)
Stable standing waves for a Schrödinger system with nonlinear χ^3 response

14:30 – 15:20 三宅 庸仁 (東京大学)
ある高階放物型方程式に対する初期値問題の解の符号における
初期値の減衰速度の影響について

15:20 – 15:40 休憩

15:40 – 16:30 勝呂 剛志 (京都大学)
ある臨界な一様局所可積分空間における Keller–Segel 系の
特異極限問題について

16:40 – 17:30 関 行宏 (鳴門教育大学)
球面に値をとる調和写像流に対する球対称爆発解の分類に関する考察

17:40 – 19:00 自由討論

本研究集会は, 以下の援助の下で開催されます.

日本学術振興会 科学研究費補助金
基盤研究 (S) 19H05599 (代表: 石毛 和弘)
基盤研究 (C) 20K03689 (代表: 川上 竜樹)

世話人: 川上竜樹 (龍谷大学)
菅徹 (大阪公立大学)

アブストラクト

Stable standing waves for a Schrödinger system with nonlinear χ^3 response

渡辺 達也　　京都産業大学

本講演では非線形光学に現れる, ある非線形シュレディンガー方程式系の定在波解を考える. この 2 連立方程式系は χ^3-相互作用と呼ばれる 3 次の非線形項を持ち, 片側にのみ強い結合があることが特徴である.

Oliveira-Pastor(2021) は対応する定常問題の基底状態解の存在を示し, その安定性・不安定性を調べた. 本研究では制限付き最小化問題の可解性を考察することで, 安定な定在波解の存在を示す. また, その最小点と基底状態解の対応を調べる.

本研究内容は Mathieu Colin 氏 (ボルドー大学) との共同研究に基づく.

ある高階放物型方程式に対する初期値問題の解の符号における初期値の減衰速度の影響について

三宅 庸仁　　東京大学

本講演では, 線形及び半線形多重調和熱方程式に対する初期値問題の解の符号について考察する. 二階放物型方程式に対する初期値問題では,「非負な初期値に対する解は必ず時空間大域的に非負となる」という正値性保存則が広く成立することが知られている. 一方で高階の場合, 最も単純な重調和熱方程式に対する初期値問題においてさえ, 正値性保存則は一般に成立しない. しかし, 初期値の空間遠方での減衰が十分遅い場合には, 同問題に対する解は十分時間が経った後に空間大域的な正値関数となることが期待される. 本講演の目的は, 多重調和熱方程式の解が時間終局的かつ空間大域的に正値関数となるか否かを分ける, 初期値の減衰速度に対する閾値の存在を示すことである. また, この結果の応用として冪乗型非線形項をもつ半線形多重調和熱方程式の初期値問題に対して同様の性質を持つ解を構成する.

ある臨界な一様局所可積分空間における Keller–Segel 系の特異極限問題について

勝呂 剛志　　京都大学

本講演では, 一様局所可積分空間における Keller–Segel 系の初期値問題を考える. この方程式系は非線形項に非局所的な移流効果を擁するため, 空間遠方において減衰しない函数を取り扱う一様局所可積分空間における初期値問題の適切性の検証は一般的に困難である. ここでは, Fujita–Kato の原理から従うある臨界な一様局所可積分空間における放物-放物型 Keller–Segel 系の初期値問題の適切性を示し, 放物-楕円型 Keller–Segel 系を導出する緩和時間零極限を考察する. なお, 本講演は小川卓克氏 (東北大学) との共同研究に基づく.

球面に値をとる調和写像流に対する球対称爆発解の分類に関する考察

関 行宏　　鳴門教育大学

単位球面 $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ に値をとる調和写像流 $F_t = F(\cdot, t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^d$ を考える:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F + |\nabla F|^2 F, \qquad t > 0. \tag{1}$$

標的多様体が球面で断面曲率は正であるため, 時間大域可解性に関する Eells–Sampson (1964) の結果は一般には成り立たない. 実際に調和写像流は時間大域的に存在せず, エネルギー密度 $|\nabla F|^2$ が有限時間で爆発することがある. 本講演では

$$F(x, t) = \left(\frac{x}{r} \sin u(r, t), \cos u(r, t) \right) \qquad (r = |x|) \tag{2}$$

と表示される解 (equivariant map) を考察する. すると (1) はスカラー値の半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{d-1}{2r^2}\sin(2u), \qquad r > 0,\ t > 0 \tag{3}$$

に帰着される. $r = 0$ では Dirichlet 境界条件 $u(0, t) = 0$ $(t > 0)$ を課す. $3 \le d \le 4 + 2\sqrt{2}$ のとき, 可算無限個の自己相似解が存在する (Fan(1999), Biernat–Bizoń(2011)). 一方 $d \ge 7$ のとき, すべての爆発は非自己相似的であることが背理法により証明されている (Bizoń–Wesserman(2015)).

講演者は P. Biernat 氏との共同研究 (2019, 2020) で $d \ge 7$ に対して, 詳細な時空各点評価を持つ解 F_ℓ $(\ell = 1, 2, ...)$ を構成した. これらの解のもつ特徴が有限時間で爆発する任意の解に共通して成り立つかを考察することが本講演の主題である. 藤田方程式に対する Matano–Merle (2004), Mizoguchi (2007) 等の研究を参考にして得られたいくつかの成果を報告する.