数理モデル基礎及び演習I:講義ノート (第1回)

森田 善久
龍谷大学理工学部

1 序

1.1 数理モデルとは

物理現象から始まって，生物現象，経済現象，社会現象などの様々な現象は数式を使ってモデル化できる．最近の新型ウィルスの感染の拡大予想でも感染症モデルが使われている．それでは数理モデルというのはどんなものか？最も有名なのは，引力の現象を数式で表したニュートンの例である．万有引力の法則を仮定し数式で表すと，りんごの落下だけでなく，惑星の運動も説明できる．こうして万有引力の法則は数理モデルを使って表され物理法則として確立した．

しかし，法則がわからない，あるいは複雑に色々な要素が絡み合っていて数式で表すのが難しい場合もある．その時には，モデル化という作業が重要になる．この科目では，幾つかの簡単な数理モデルの例とそれがどのように役立つかを紹介する．

1.2 微分方程式とは

現象を数理モデル化する場合，現象によってモデル化の手法が異なる．よく使われるモデル方程式として，微分方程式や差分方程式に加え，確率モデルもある．この科目では初等的な微分方程式の解き方と，方程式の特徴について学ぶ．微分方程式には「常微分方程式」と「偏微分方程式」があるが，講義では「常微分方程式」しか扱わないので，微分方程式という場合は特に断りがなければ常微分方程式を意味する．

ここで（常）微分方程式とは一般に独立変数 x, $y = y(x)$ とその n 階までの導関数 $y^{(n)}$ の間に成り立つ関係式

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

である．n 階までの導関数が現れる場合，n 階微分方程式と呼ぶ．この式を満たす $y = y(x)$ を求めることを，微分方程式を解くといい，微分方程式を満たす関数 $y(x)$ を微分方程式の解という．

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

のように一番高い階数の導関数について解けた形を正規形という．

(例): 1階微分方程式の例

$$y' + y\sin x = 0, \quad xy' + y^2 = 0, \quad y' = xy, \quad (y')^3 - y^2 = 0$$

2階微分方程式の例

$$y'' + y' - 2xy = 0, \quad y'y'' + y^2 + y\log x = 0$$

この様に微分方程式はいくらでも作ることができる．

1.3　一般解と特殊解

最も簡単な微分方程式 $y' = f(x)$ の解は $f(x)$ の不定積分 $F(x) + C$ によって求まる．この時，C は積分定数でどの様にとっても良いので任意定数と呼ばれる．$y'' = f(x)$ の場合は，$f(x)$ を 2 回積分する必要があるので 2 つの積分定数が現れる．一般の n 階微分方程式の場合，n 個の任意定数 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を持つ解を微分方程式の一般解という．その中の一つの解を特殊解あるいは特解とよぶ．これ以外に，一般解で表せない解が存在する場合もある．そのような解は特異解とよばれる．

(例):

1. C を任意定数とする $y = C\mathrm{e}^x$ は，$y' = y$ を満たすのでこの方程式の一般解である．また $y = \mathrm{e}^x$ は特殊解である．

2. C_1, C_2 を任意定数とする $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2$ は，$y'' + y' = 0$ を満たすので一般解である．$y = 1$ は特殊解である．

3. $(y')^2 + xy' - y = 0$ は一般解 $y = Cx + C^2$ を持つ．また，$y = -\frac{1}{4}x^2$ も解になっている（確かめよ）が，一般解で C をどのようにとってもこの解を表すことができないので特異解である（特殊解ではない）．

1.4　任意定数をもつ曲線族を解に持つ微分方程式

微分方程式の特殊解は一つの曲線を表すが，任意定数を持つ一般解は曲線族を成す．逆に曲線族が与えられたとき，それを一般解に持つ微分方程式を作ってみよう．

1. $x^2 - y^2 = C$ を一般解に持つ $y = y(x)$ に関する微分方程式を求める．両辺を x で微分すると $2x - 2yy' = 0$. よって，$yy' - x = 0$ が求める微分方程式である．

2. $y = C_1 \cos(x + C_2)$ を一般解に持つ微分方程式を求める．両辺を x で微分すると，$y' = -C_1 \sin(x + C_2)$. もう一回微分すると $y'' = -C_1 \cos(x + C_2)$. よって $y'' = -y$ (あるいは $y'' + y = 0$) が求める微分方程式である．

以上を参考にしながら演習課題 No. 1 に取り組みなさい．