数理モデル基礎及び演習I:講義ノート(第2回)

森田 善久
龍谷大学理工学部

1　変数分離形の微分方程式と数理モデル

1.1　人口モデルと放射性物質の崩壊モデル

マルサスの人口モデル： $N(t)$ を時刻 t における人口とする．時刻 t から $t+\Delta t$ の間の人口の変化は $N(t+\Delta t)-N(t)$ なので，t から $t+\Delta t$ の間の $N(t)$ の平均変化率は

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

である．出生と死亡による人口の増減は現在の人口 $N(t)$ に比例すると仮定すると，次の人口の変化を表す関係式が得られる．

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=aN(t)-bN(t)=(a-b)N(t)$$

(a,b はそれぞれ出生率と死亡率). この式で $\Delta t\to 0$, と極限をとると微分方程式

$$\frac{dN}{dt}=kN(t), \qquad k:=a-b \tag{1.1}$$

が得られる．これは英国の経済学者マルサスの名前にちなんでマルサスの成長モデルと呼ばれる．k は定数で人口増加を考えるときは $k>0$ の場合を考える．

放射性物質の崩壊モデル： $y(t)$ を時刻 t における放射性物質の原子の個数とする．ラザフォードの原理では崩壊速度 $-dy/dt$ は残存する放射性原子の個数に比例する．その係数を $\lambda>0$ とすると，$-dy/dt=\lambda y$, すなわち

$$\frac{dy}{dt}=-\lambda y \tag{1.2}$$

が得られる．

1.2　変数分離形の解法

$y=y(x)$ に関する微分方程式が

$$\frac{dy}{dx}=a(x)f(y) \tag{1.3}$$

の形に表される場合，変数分離形と呼ぶ（右辺は独立変数 x と従属変数 y の関数の積になっている）．

$$\frac{dy}{dx}=f(y)$$

と右辺が y のみの式の場合も変数分離形の特別な場合（$g(x)$ が恒等的に 1）に相当する．方程式 (1.1) と (1.2) は共に変数分離形である．

変数分離形 (1.3) は次の様にして解くことができる．$f(y) \neq 0$ のとき，$f(y)$ で両辺を割り

$$\frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)dx + C$$

右辺は $g(x)$ の不定積分そのもので，C は積分定数（任意の定数）．左辺は置換積分の公式から

$$\int \frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{1}{f(y)}\,dy$$

こうして

$$\int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(x)dx + C$$

が得られる．この積分を計算できれば解が求まる．一方，$f(y) = 0$ のとき，これを満たす y は x に依存しないのでそれは (1.3) の特殊解になっている．よってそれを加えれば全ての解が得られる．

（例）

1. $\dfrac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ を解く．上に習って，この場合は $1+y^2 \neq 0$ なので

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int x\,dx + C$$

積分すると $\arctan y = \dfrac{x^2}{2} + C$. よって，一般解

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \qquad (C : \text{任意定数})$$

が得られる． 解になっていることを検算してみよう．両辺を微分すると

$$y' = \frac{(x^2/2+C)'}{\cos^2(x^2/2+C)} = x\{1+\tan^2(x^2/2+C)\}$$

右辺は $x(1+y^2)$ となるから確かに方程式を満たしている．

2. $xy' = y(y-1)$ の一般解と $y(1) = 2$ を満たす解を求める．まず右辺が 0 となる $y = 0$ と $y = 1$ は解になっている．次に $y \neq 0, 1$ の場合 $\frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x}$ と書き直すと（$x = 0$ の点は気にしなくてよい）

$$\int \frac{1}{y(y-1)}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx + C_1 = \log|x| + C_1$$

左辺の積分を計算する．

$$左辺 = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \log|y-1| - \log|y| = \log \frac{|y-1|}{|y|} = \log \left| \frac{y-1}{y} \right|$$

よって

$$\log \left| \frac{y-1}{y} \right| = \log|x| + C_1$$

より

$$\left| \frac{y-1}{y} \right| = \mathrm{e}^{\log|x| + C_1} = \mathrm{e}^{\log|x|}\mathrm{e}^{C_1} = |x|\mathrm{e}^{C_1}$$

絶対値を外すと

$$\frac{y-1}{y} = \pm \mathrm{e}^{C_1} x = Cx \quad (C = \pm \mathrm{e}^{C_1})$$

最後に y について解けば，一般解 $y = \dfrac{1}{1 - Cx}$ を得る．この式で $C = 0$ と置くと解 $y = 1$ が得られ $C \to \infty$ と極限をとると $y = 0$ が得られる．また，$y(1) = 2$ を満たすのは $1/(1-C) = 2$ を解いて $C = 1/2$. よって $y = \dfrac{1}{1 - x/2} = \dfrac{2}{2 - x}$.

3. (1.1) の $N(0) = N_0$ を満たす解を求めると $N(t) = N_0\mathrm{e}^{kt}$ (確かめよ).

4. (1.2) の $y(t_0) = y_0$ を満たす解を求めると $y(t) = y_0\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}$ (確かめよ).

1.3　応用例：放射性物質の半減期

福島原発の事故では，放射性物質の空中への飛散による汚染が問題になり，現在も残存する放射性汚染に苦しめられている地区がある．放射性物質が放出する放射能は時間とともに減衰するが，その減衰速度は原子によって異なる．崩壊速度を知る目安として半減期というのがある．これはどれくらいの期間で生み出された放射性原子が元の半分になるかを示す．計算方法は簡単である．(1.2) の $y(0) = y_0$ を満す解は $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$ なので，y_0 の $1/2$ になる時間 T を

$$y(T) = y_0 e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} y_0$$

から求めればよい．よって $e^{-\lambda T} = 1/2$ を解いて $-\lambda T = \log(1/2)$, すなわち

$$T = \frac{1}{\lambda}\log 2$$

が求める半減期 T である. λ は原子によって決まる．

原発事故ではセシウムが問題になっている．これは半減期が長いからである．どれくらいの半減期があるか，インターネットでよいから調べてみよ．T から逆に λ がわかる.

また，この半減期の考え方は，炭素の放射性同位体（炭素 14) を調べることによる年代測定（放射性炭素年代測定）に応用されている．